

۱

گزینه درست: ۱

سوال ۱

گزینه «۱»

$$t_n = an^2 + bn + c$$

$$t_{12} = 160a \rightarrow 320 = 160a \Rightarrow a = 2$$

$$\begin{cases} t_2 = 22 \\ t_{12} = 320 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 22 \\ 144a + 12b + c = 320 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a=2} \begin{cases} 2b + c = 5 \\ 12b + c = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -4 \end{cases}$$

بنابراین جمله عمومی دنباله به صورت $t_n = 2n^2 + 3n - 4$ است، حال داریم: $t_1 = 2 + 3 - 4 = 1$

۲

گزینه درست: ۲

سوال ۲

گزینه «۲»

اگر x, y و z سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، رابطه $y^2 = xz$ بین آن‌ها برقرار است. در این سؤال داریم:

$$(2^2a)(4\sqrt{2})^{b+2} = (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2^{2a+\frac{5}{2}b+5} = 2^3$$

$$\Rightarrow 2a + \frac{5}{2}b + 5 = 3 \Rightarrow 2a + \frac{5}{2}b = -2 \quad (*)$$

حال مجموع پنج جمله اول دنباله حسابی داده شده را حساب می‌کنیم:

$$S = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 5t_3 = 5\left(\frac{t_2+t_4}{2}\right) = \frac{5}{2}(t_2 + t_4)$$

در این دنباله حسابی داریم:

$$t_2 + t_4 = 2a + 1 + \frac{5}{2}b + 3 = 2a + \frac{5}{2}b + 4 \stackrel{(*)}{=} -2 + 4 = 2$$

و در نتیجه مجموع پنج جمله اول آن برابر است با:

$$S = \frac{5}{2}(2) = 5$$

۳

گزینه درست: ۱

سوال ۳

گزینه «۱»

جملات دنباله حسابی را $t_1, t_1 + d$ و $t_1 + 3d$ در نظر می‌گیریم که این جمله باید تشکیل دنباله هندسی بدهند، پس داریم:

$$t_1(t_1 + 3d) = (t_1 + d)^2 \Rightarrow t_1^2 + 3t_1d = t_1^2 + 2t_1d + d^2$$

$$\Rightarrow t_1d = d^2 \xrightarrow{d \neq 0} t_1 = d$$

پس قدرنسبت دنباله هندسی برابر $r = \frac{t_1+d}{t_1} = 2$ است. مجموع ۱۰ جمله و ۲۰ جمله اول این دنباله برابر است با:

$$S_{10} = t_1(2^{10} - 1), \quad S_{20} = t_1(2^{20} - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{20}}{S_{10}} = \frac{2^{20}-1}{2^{10}-1} = 2^{10} + 1 = 1025$$

۴

گزینه درست: ۱

سوال ۴

گزینه «۱»

فرض کنید a, b, c دنباله حسابی و a^F, b^F, c^F دنباله هندسی تشکیل دهند. داریم:

$$b = \frac{a+c}{2}, a^F c^F = (b^F)^2 \Rightarrow \begin{cases} ac = b^2 \\ ac = -b^2 \end{cases}$$

اگر $ac = b^2$ باشد:

$$ac = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 + c^2 + 2ac = 4ac \\ \Rightarrow a^2 + c^2 - 2ac = 0 \Rightarrow (a-c)^2 = 0 \Rightarrow a = c$$

که با فرض متمایز بودن a و c تناقض دارد. پس $ac = -b^2$ است و در نتیجه داریم:

$$ac = -\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 + c^2 + 2ac = -4ac \\ a^2 + c^2 + 6ac = 0 \Rightarrow 1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 + 6\left(\frac{c}{a}\right) = 0$$

با فرض $\frac{c}{a} = x$ داریم:

$$x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow x = -3 \pm \sqrt{8}$$

هر دو مقدار $-3 + \sqrt{8}$ و $-3 - \sqrt{8}$ قابل قبول است.

۵

گزینه درست: ۲

سوال ۵

گزینه «۲»

ده واسطه‌ی حسابی

$$18, \overbrace{\square, \square, \square, \square, \dots, \square}^{10 \text{ terms}}, 62$$

اگر بین دو عدد ۱۸ و ۶۲، ده واسطه‌ی حسابی قرار دهیم، یک دنباله حسابی با ۱۲ جمله خواهیم داشت که جمله اول آن ۱۸ و جمله دوازدهم آن ۶۲ است. بنابراین:

$$t_1 = 18$$

$$t_{12} = 62 \Rightarrow t_1 + 11d = 62 \Rightarrow 18 + 11d = 62 \Rightarrow 11d = 44 \Rightarrow d = 4$$

$$\Rightarrow d = 4$$

$$\frac{\text{مجموع سه جمله سوم}}{\text{مجموع سه جمله دوم}} = \frac{t_7 + t_8 + t_9}{t_4 + t_5 + t_6} \\ = \frac{(t_1 + 6d) + (t_1 + 7d) + (t_1 + 8d)}{(t_1 + 3d) + (t_1 + 4d) + (t_1 + 5d)} = \frac{3t_1 + 21d}{3t_1 + 12d} \\ = \frac{t_1 + 7d}{t_1 + 4d} = \frac{18 + 7 \times 4}{18 + 4 \times 4} = \frac{46}{34} = \frac{23}{17}$$

۶

گزینه درست: ۳

سوال ۶

گزینه «۳»

بررسی موارد:

الف) $2 \log b = \log a + \log c \Rightarrow \log b^2 = \log ac \quad \checkmark$

واسطه هندسی: $b^2 = ac$

ب) $a, b, c \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{b}{a} \\ r = \frac{c}{b} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = ac \quad \checkmark$

پ) در صورتی که $a = b = c$ باشد، یعنی دنباله ثابت باشد، دنباله a, b, c دنباله حسابی با قدرنسبت صفر می‌باشد. $\checkmark$

ت) در هر دنباله هندسی با سه جمله متوالی مثبت هیچ‌گاه جمله وسط بزرگترین نمی‌باشد. بنابراین b نمی‌تواند وتر مثلث قائم‌الزاویه که بزرگترین ضلع مثلث است، باشد. $\times$

7

گزینه درست: ۲

سوال ۷

گزینه «۲»

جملات دنباله هندسی را به صورت $a_n = ar^{n-1}$ و دنباله حسابی را به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ نشان می‌دهیم.

$$\begin{cases} (1) & a_1 r^2 = t_1 + 2d \\ (2) & a_1 r^3 = t_1 + 3d \\ (3) & a_1 r^4 = t_1 + 4d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3) - (2) & a_1 r^3 - a_1 r^2 = d \\ (2) - (1) & a_1 r^2 - a_1 r = d \end{cases}$$

رابطه بالایی را بر پایینی تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_1 r^3 (r - 1)}{a_1 r^2 (r - 1)} = \frac{d}{d} \Rightarrow \frac{r(r+1)(r-1)}{r-1} = 6$$

$$\Rightarrow r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = -3 \\ r = 2 \end{cases}$$

چون جملات دنباله هندسی مثبت هستند $r = 2$ قابل قبول است.

$$a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 = 66 \xrightarrow{r=2}$$

$$1a_1 + 16a_1 + 64a_1 = 66 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$

8

گزینه درست: ۴

سوال ۸

گزینه «۴»

با توجه به جمله عمومی یک دنباله هندسی و تساوی داده شده داریم:

$$\frac{aq^6}{(aq)^3} + \frac{aq}{a^2} = 2$$

$$\rightarrow \frac{aq^3}{a^2 q^3} + \frac{aq}{a^2} = \frac{q^3}{a^2} + \frac{aq}{a^2} = \frac{q(q+a)}{a^2} = 2$$

$$\rightarrow q^2 + aq = 2a^2 \rightarrow q^2 + aq - 2a^2 = 0$$

$$\rightarrow q = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2}$$

از طرفی خواسته سوال برابر است با:

$$\rightarrow q = \frac{-a \pm |3a|}{2} \quad \begin{cases} -2a \\ a \end{cases} (*)$$

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{a^2}{aq} = \frac{a}{q} \xrightarrow{*} \frac{a}{q} = \begin{cases} \frac{a}{-2a} = -\frac{1}{2} \\ \frac{a}{a} = 1 \end{cases}$$

9

گزینه درست: ۲

سوال ۹

گزینه «۲»

$$a_1, a_2, a_3, a_4$$

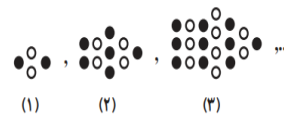
$$a_1 + a_3 = 8 \Rightarrow \frac{a_2 + a_4}{a_1 + a_3} = \frac{20}{8} \Rightarrow \frac{a_1 q + a_1 q^3}{a_1 + a_1 q^2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 q(1+q^2)}{a_1(1+q^2)} = \frac{5}{2} \Rightarrow q = \frac{5}{2}$$

$$a_1 + a_3 = 8 \Rightarrow a_1 + \frac{25}{4} a_1 = 8 \Rightarrow \frac{29}{4} a_1 = 8$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{32}{29}$$

۱۰

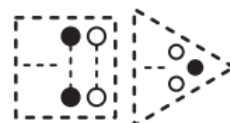


گزینه درست: ۴

سوال ۱۰

گزینه «۴»

مطابق شکل در شماره n ام، یک دنباله مثلثی با $n+1$ ردیف (با ردیف‌های فرد توپر) و یک دنباله مربعی $n \times n$ (با ردیف‌های یک در میان توپر) وجود دارد. لذا در شماره دهم، تعداد دایره‌های توپر برابر می‌شوند با:



$$(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11) + 5(10) = 6^2 + 50 = 86$$

۱۱

گزینه درست: ۳

سوال ۱۱

گزینه «۳»

مثلث قائم‌الزاویه را با اضلاعی به ترتیب معادل با a, b و $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ در نظر می‌گیریم. در یک دنباله حسابی، جمله وسط برابر با میانگین دو جمله دیگر است، پس داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = b &\Rightarrow 2b = a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ \Rightarrow 2b - a = \sqrt{a^2 + b^2} &\Rightarrow 4b^2 + a^2 - 4ab = a^2 + b^2 \\ \Rightarrow b = \frac{4}{3}a & \\ c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \frac{16}{9}a^2 = \frac{25}{9}a^2 &\Rightarrow c = \frac{5}{3}a \end{aligned}$$

در نتیجه مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{a \times b}{2} \Rightarrow S = \frac{a \times (\frac{4}{3}a)}{2} = \frac{2}{3}a^2$$

همچنین محیط مثلث برابر است با:

$$P = a + b + c = a + \frac{4}{3}a + \frac{5}{3}a = 4a$$

۱۲

گزینه درست: ۲

سوال ۱۲

گزینه «۲»

با توجه به جمله اول و قدرنسبت دنباله هندسی می‌توان جمله نهم و دهم را یافت پس داریم:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{16} \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_9 = a_1 q^8 = \frac{1}{16} \times 2^8 = 2^4 = 16 \\ a_{10} = a_1 q^9 = \frac{1}{16} \times 2^9 = 32 \end{cases}$$

بین جمله نهم و دهم، سه جمله درج می‌کنیم:

$$16, a, b, c, 32 \Rightarrow \begin{cases} \text{قدر نسبت دنباله حسابی} & d = \frac{32 - 16}{4} = \frac{16}{4} = 4 \\ \text{مجموع سه جمله} & = 72 \end{cases}$$

۱۳

گزینه درست: ۴

سوال ۱۳

گزینه «۴»

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 27 \Rightarrow 3a_1 + 3d = 27 \\ a_{20} + a_{19} + a_{18} &= 57 \Rightarrow 3a_1 + 57d = 57 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_1 = \frac{143}{17}, d = \frac{10}{17}$$

$$\frac{d}{a_1} = \frac{\frac{10}{17}}{\frac{143}{17}} = \frac{10}{143}$$

۱۴

گزینه درست: ۲

سوال ۱۴

گزینه «۲»

جمله پنجم جدید را با a'_5 و جمله پنجم قدیم (اولیه) را با a_5 نمایش می‌دهیم:

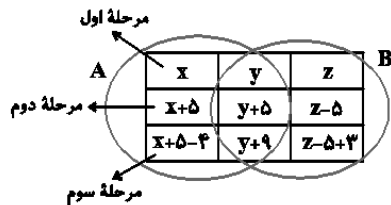
$$\begin{aligned} a'_5 - a_5 &= (a_1 + 4d') - (a_1 + 4d) \\ &= 4d' - 4d = 4(d' - d) = 4 \times 4 = 16 \end{aligned}$$

۱۵

گزینه درست: ۳

سوال ۱۵

گزینه «۳»



اجتماع دو مجموعه جدید برابر است با:

$$x + y + z = 15$$

$$\text{حالت جدید: } n(A \cup B) = x + 5 - 4 + y + 9 + z - 5 + 3$$

$$= x + y + z + 8 = 23$$

۱۶

گزینه درست: ۱

سوال ۱۶

گزینه «۱»

تعداد اعداد صحیح در بازه (a, b) که $a, b \in \mathbb{Z}$ هستند $b - a - 1$ و تعداد اعداد صحیح در بازه $[a, b]$ و $[a, b]$ برابر $b - a$ و تعداد اعداد

صحیح بازه $[a, b]$ برابر $b - a + 1$ است. بنابراین:

$$\begin{cases} m - 3 - (2n - 1) = 2(-7n + 1) - (m + 3) - 1 + 1 \\ m - (-n) + 1 = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m - 3 - 2n + 1 = -14n + 2 - 2m - 6 - 2 + 1 \\ m + n = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3m + 12n = -3 \\ m + n = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m + 12n = -3 \\ -3m - 3n = -15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 9n = -18 \Rightarrow n = -2, m = 7$$

بازه $(-5n, 2m)$ به صورت $(10, 14)$ است که شامل هیچ عدد مربع کاملی نیست.

۱۷

گزینه درست: ۲

سوال ۱۷

گزینه «۲»

$$a + ۴, ۵, c - ۳$$

در دنباله حسابی، اختلاف هر دو جمله متوالی برابر با قدرنسبت است.

$$\begin{cases} ۵ - (a + ۴) = ۳ \Rightarrow ۵ - a - ۴ = ۳ \Rightarrow ۱ - a = ۳ \Rightarrow a = -۲ \\ c - ۳ - ۸ = ۳ \Rightarrow c - ۸ = ۳ \Rightarrow c = ۱۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{c-1}{a} = \frac{11-1}{-2} = \frac{10}{-2} = -5$$

۱۸

گزینه درست: ۳

سوال ۱۸

گزینه «۳»

با توجه به دنباله‌ها اولین جمله مشترک ۲۷ است و قدرنسبت دنباله مشترک هم ک.م.م بین قدرنسبت دو دنباله مذکور است.

$$۱۵ = [۳, ۵] = \text{ک.م.م دنباله جدید}$$

بنابراین دنباله مشترک به صورت زیر نوشته می‌شود: ۲۷, ۴۲, ۵۷, ...

جمله عمومی دنباله مشترک را می‌نویسیم و آن را کمتر از ۱۰۰۰ قرار می‌دهیم و مقدار n را می‌یابیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow[d=15]{a_1=27} a_n = 27 + (n-1) \times 15$$

$$\Rightarrow a_n = 15n + 12$$

$$a_n < 1000 \Rightarrow 15n + 12 < 1000 \Rightarrow 15n < 988 \Rightarrow n \leq 65$$

چون مقدار n طبیعی است بنابراین بازه اصلی به صورت $1 \leq n \leq 65$ است و دنباله ۶۵ جمله کمتر از ۱۰۰۰ دارد.

۱۹

گزینه درست: ۳

سوال ۱۹

گزینه «۳»

۲۰

گزینه درست: ۲

سوال ۲۰

گزینه «۲»

$$a_۴ \times a_۸ = a_۵ \times a_۷ \Rightarrow x(x+1) = (۲x+1)(x-1)$$

$$\Rightarrow x^۲ + x = ۲x^۲ - ۲x + x - 1 \Rightarrow x^۲ - ۲x - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^۲ = ۲$$

$$q = \frac{x-1}{x+1} = \frac{\pm\sqrt{۲}}{\pm\sqrt{۲}+۲} = \begin{cases} \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+۲} = \frac{1}{\sqrt{۲}+1} \\ \frac{-\sqrt{۲}}{-\sqrt{۲}+۲} = \frac{1}{1-\sqrt{۲}} \end{cases}$$

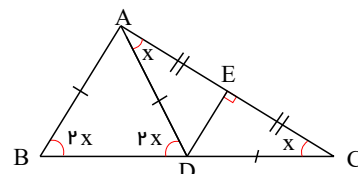
$$\Rightarrow x = -1, \quad x-1 = \pm\sqrt{۲}$$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ DE پاره خط AC را نصف کرده و بر آن عمود است. از A به D وصل می‌کنیم. بنابراین $AD = DC$ و چون $AB = DC$ ، پس $AB = AD$ است.

با فرض $\hat{C} = x$ در مثلث ADC داریم:

$$DA = DC \Rightarrow \hat{DAC} = x$$



$$\hat{ADC} : \hat{ADB} \Rightarrow \hat{ADB} = x + x = 2x$$

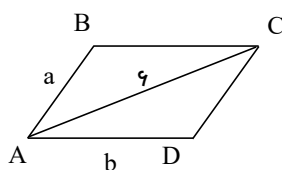
$$\xrightarrow{AB=AD} \hat{B} = 2x \xrightarrow{AC=BC} \hat{BAC} = \hat{B} \Rightarrow \hat{BAC} = 2x$$

$$\hat{ABC} : \hat{B} + \hat{C} + \hat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow 5x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$$

$$\alpha = 2x + (90^\circ - x) = 90^\circ + x = 90^\circ + 36^\circ = 126^\circ$$

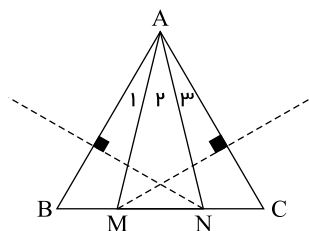
۲ - گزینه ۲ می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، اضلاع روبه‌رو با یکدیگر برابرند. بنابراین $BC = AD = b$.

با روش مندرج در متن سؤال فقط زمانی یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید که کمان‌های رسم شده به شعاع‌های a و b به مراکز C و A یکدیگر را قطع کنند. به بیانی دیگر مثلث ABC با اضلاع ۶ و a و b قابل رسم باشد، پس لازم است که $a + b > 6$ ، $a + 6 > b$ و $b + 6 > a$ باشد، بنابراین گزینه (۲) صحیح است.



۳ - گزینه ۱ می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است. پس با معلوم بودن میانه وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه، وتر آن پارامتر مستقلی نبوده، لذا رسم مثلث با این معلومات ممکن نیست.

۴ - گزینه ۲ می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است. بنابراین:

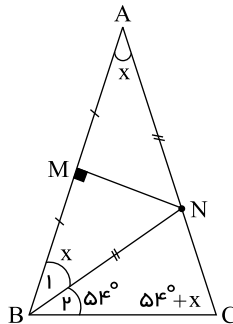


$$\left. \begin{aligned} MA = MC &\rightarrow \hat{A}_{1,2} = \hat{C} \rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{C} \\ NA = NB &\rightarrow \hat{A}_{1,2} = \hat{B} \rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین دو تساوی را جمع می‌کنیم}} (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3) + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C} \rightarrow \hat{BAC} + \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{BAC} \rightarrow 180^\circ + \hat{A}_2 = 180^\circ - 180^\circ \rightarrow \hat{A}_2 = 20^\circ$$

۵ - گزینه ۳

می‌دانیم هر نقطه روی عمود منصف پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است. بنابراین:



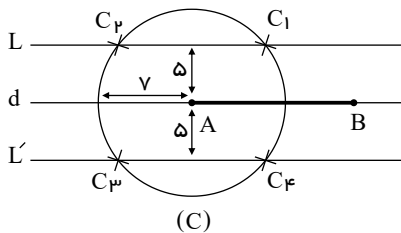
$$NA = NB \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A} = x$$

$$AB = AC \rightarrow \hat{C} = \hat{B}_{1,2} = 54^\circ + x$$

$$\triangle ABC : x + (54^\circ + x) + (54^\circ + x) = 180^\circ \rightarrow 3x = 72^\circ \rightarrow x = 24^\circ$$

$$\triangle BMN : \hat{MNB} = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$$

۶ - گزینه ۴ مجموعه نقاطی از صفحه A به فاصله ۷ واحد قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A با شعاع ۷ واحد است. (دایره C). مجموعه نقاطی از صفحه که از خط شامل پاره خط AB (d) به فاصله ۵ واحد هستند، دو خط موازی d به فاصله ۵ واحد از آن در دو طرفش است (خطهای L و L'). محل برخورد دایره (C) با خطهای L و L' چهار نقطه C_۱, C_۲, C_۳ و C_۴ هستند. مطلوب سؤال هستند.

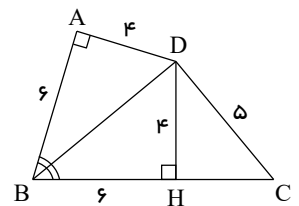


۷ - گزینه ۳ بی‌شمار چهارضلعی وجود دارد که قطرهای برابر و عمود بر هم، داشته باشند.

مثال نقض: دوزنقه متساوی الساقین با قطرهای عمود بر هم.

۸ - گزینه ۳ از D بر BC عمود می‌کنیم. چون D روی نیمساز زاویه ABC قرار دارد. پس:

$$\begin{cases} DH = AD = 4 \\ BH = AB = 6 \end{cases}$$

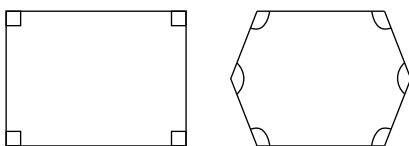


در مثلث قائم‌الزاویه DHC بنابر قضیه فیثاغورس داریم:

$$HC = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \Rightarrow BC = BH + HC = 6 + 3 = 9$$

۹ - گزینه ۴ مثال‌های نقض گزینه ۱: تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه، که محل هم‌رسی ارتفاع‌های آن‌ها روی محیط مثلث قرار دارد.

مثال‌های نقض گزینه ۲:



مثال‌های نقض گزینه ۳:

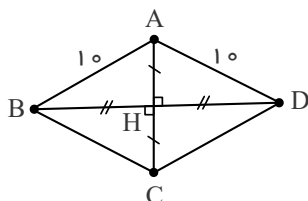
۱. دو مستطیل به ابعاد ۳ × ۴ و ۲ × ۶

۲. دو مستطیل به ابعاد ۴ × ۶ و ۳ × ۸

تنها مثال نقض گزینه ۴: عدد صفر است که اگر در $\sqrt{2}$ ضرب شود، گنگ نمی‌شود.

۱۰ - گزینه ۴

اگر مطابق شکل فرض کنیم AC قطر کوچک لوزی ABCD است. داریم:



$$AC \leq BD \rightarrow \frac{1}{2}AC \leq \frac{1}{2}BD \rightarrow AH \leq HD \rightarrow AH^2 \leq HD^2 \xrightarrow{+AH^2}$$



$$2AH^2 \leq HD^2 + AH^2 \xrightarrow{AH^2 + HD^2 = AD^2} 2AH^2 \leq AD^2 \rightarrow AH^2 \leq \frac{AD^2}{2}$$

$$\xrightarrow{AD=10} AH^2 \leq \frac{10^2}{2} \rightarrow AH^2 \leq 50 \rightarrow AH \leq 5\sqrt{2} \xrightarrow{\times 2} 2AH \leq 10\sqrt{2} \rightarrow AC \leq 10\sqrt{2}$$

۱

گزینه درست: ۳

سوال ۱

$$a = 20q + 6 \Rightarrow 6a = 120q + 36$$

$$b = 12q' + 5 \Rightarrow 15b = 180q' + 75$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} 6a - 15b = (120q + 36) - (180q' + 75)$$

$$\Rightarrow 6a - 15b = 120q - 180q' - 39$$

$$6a - 15b = 30(4q - 6q' - 1) - 9$$

$$\Rightarrow 6a - 15b = 30q'' - 9 = 30q'' - 30 + 30 - 9$$

$$= 30(q'' - 1) + 21 \Rightarrow r = 21$$

حالا باید از ۳۰ فاکتور بگیریم، بنابراین داریم:

۲

گزینه درست: ۱

سوال ۲

گزینه «۱»

$$\left. \begin{aligned} a = 6k + 4 &\xrightarrow{\times 7} 7a = 42k + 28 \\ a = 7k' + 3 &\xrightarrow{\times 6} 6a = 42k' + 18 \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a = \underbrace{42(k - k')}_{q} + 10$$

$$\Rightarrow a = 21 \times \underbrace{2q}_{q'} + 10 = 21q' + 10$$

۳

گزینه درست: ۲

سوال ۳

گزینه «۲»

$$x = 27q_1 + 12 \Rightarrow 2x = 2(27q_1) + 24 \quad (q_1 \in \mathbb{Z})$$

$$y = 27q_2 + 13 \Rightarrow 3y = 3(27q_2) + 39 \quad (q_2 \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow 2x - 3y = 27 \left(\underbrace{2q_1 - 3q_2}_q \right) - 15 = 27q - 15$$

$$= 27q - 27 + 12 = 27(q - 1) + 12 \Rightarrow r = 12$$

۴

گزینه درست: ۳

سوال ۴

گزینه «۳»

$$a = 23q + 7q \Rightarrow 7q < 23 \Rightarrow q < \frac{23}{7} \Rightarrow q \leq 3$$

$$q_{\max} = 3 \Rightarrow a_{\max} = 30(3) = 90 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 9$$

۵

گزینه درست: ۲

سوال ۵

$$802 = 14b + r \xrightarrow{0 \leq r < b} \begin{cases} r = 802 - 14b \geq 0 \Rightarrow b \leq 57 \\ r = 802 - 14b < b \Rightarrow b \geq 54 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 54 \leq b \leq 57$$

۶

گزینه درست: ۳

سوال ۶

گزینه «۳»

اگر قضیه تقسیم را به صورت $a = 17q + 9 \quad (q \in \mathbb{Z})$ بنویسیم، آنگاه داریم:

$$a + 50 = 17q + 59 = 17q + 51 + 8 = 17(q + 3) + 1$$

بنابراین خارج قسمت تقسیم ۳ واحد افزایش یافته و باقی‌مانده آن به اندازه $1 = 9 - 8$ واحد کاهش می‌یابد.

۷

گزینه درست: ۳

سوال ۷

گزینه «۳»

طبق قضیه تقسیم داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a = 6q + 1 \xrightarrow{\times 4} 4a = 24q + 4 \\ a = 8q' + 5 \xrightarrow{\times 3} 3a = 24q' + 15 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a = 24(q - q') - 11$$

$$\Rightarrow a = 24(q - q') - 24 + 24 - 11 = 24(\underbrace{q - q' - 1}_{q''}) + 13$$

$$\Rightarrow a = 24q'' + 13$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم a بر ۲۴، برابر ۱۳ است.

۸

گزینه درست: ۴

سوال ۸

گزینه «۴»

طبق قضیه تقسیم برای دو عدد (۶۰-) و ۱۱ داریم:

$$-60 = 11 \times (-6) + 6 \Rightarrow \begin{cases} q = -6 \\ r = 6 \end{cases}$$

دقت کنید که باقی مانده همواره نامنفی است.

۹

گزینه درست: ۱

سوال ۹

گزینه «۱»

$$a = 17q + r \xrightarrow{q = \frac{r}{2}} a = 17q + 2q = 19q$$

$$0 \leq r < 17 \Rightarrow 0 \leq 2q < 17 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} 1 \leq q \leq 8$$

$$\max(a) = 19 \times 8 = 152$$

$$\min(a) = 19 \times 1 = 19$$

$$\max(a) - \min(a) = 152 - 19 = 133$$

۱۰

گزینه درست: ۴

سوال ۱۰

گزینه «۴»

طبق قضیه تقسیم داریم: (۱) $a = 28q + r$ $0 \leq r < 28$

از طرفی $1 + 3q^2 > r$ ، بنابراین داریم:

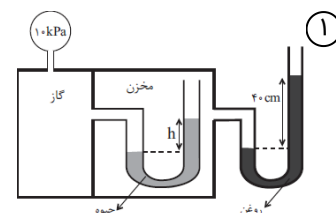
$$q = 0 \Rightarrow r > 1 \xrightarrow{(1)} 2 \leq r \leq 27 \Rightarrow \text{مقدار } 26$$

$$q = 1 \Rightarrow r > 4 \xrightarrow{(1)} 5 \leq r \leq 27 \Rightarrow \text{مقدار } 23$$

$$q = 2 \Rightarrow r > 13 \xrightarrow{(1)} 14 \leq r \leq 27 \Rightarrow \text{مقدار } 14$$

به ازای $q \geq 3$ رابطه امکان‌پذیر نیست، بنابراین تعداد مقادیر a برابر است با:

$$26 + 23 + 14 = 61$$

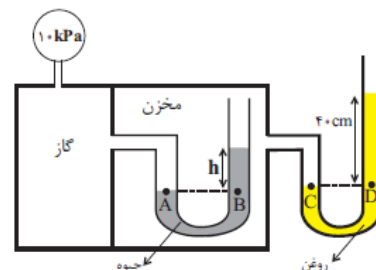


گزینه درست: ۱

سوال ۱

گزینه «۱»

فشارسنج، فشار پیمانه‌ای داخل مخزن را نشان می‌دهد که برابر اختلاف فشار مطلق و فشار محیط است. با توجه به برابری فشار در نقاط هم‌تراز یک مایع ساکن، داریم:



$$P_A = P_B$$

$$\Rightarrow P_{\text{گاز}} = \rho_{\text{جیوه}} gh_{\text{جیوه}} + P_{\text{مخزن}} \quad (1)$$

$$P_C = P_D \Rightarrow P_{\text{مخزن}} = \rho_{\text{روغن}} gh_{\text{روغن}} + P_0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} P_{\text{گاز}} = \rho_{\text{جیوه}} gh_{\text{جیوه}} + \rho_{\text{روغن}} gh_{\text{روغن}} + P_0$$

$$P_{\text{گاز}} - P_0 = \rho_{\text{جیوه}} gh_{\text{جیوه}} + \rho_{\text{روغن}} gh_{\text{روغن}}$$

$$\Rightarrow P_g = \rho_{\text{جیوه}} gh_{\text{جیوه}} + \rho_{\text{روغن}} gh_{\text{روغن}}$$

$$\Rightarrow 10 \times 10^3 = 13600 \times 10 \times h_{\text{جیوه}} + 800 \times 10 \times 4 \times 10^{-2}$$

$$\Rightarrow 13/6 \times 10^4 h_{\text{جیوه}} = 6800 \Rightarrow h_{\text{جیوه}} = 0.05m = 5cm$$

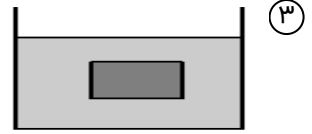
۲

گزینه درست: ۱

سوال ۲

گزینه «۱»

چگالی یک ماده، تابع دما و جنس آن است چون دما ثابت است و با تغییر حجم ماده چگالی تغییر نمی‌کند.



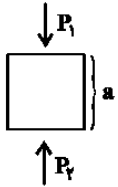
گزینه درست: ۱

سوال ۳

گزینه «۱»

اختلاف فشار وارد بر دو وجه افقی مکعب، نیرویی بالاسو بر مکعب وارد می‌کند که چون مکعب داخل سیال در حال تعادل است، پس این نیروی بالاسو با نیروی وزن مکعب برابر است. داریم:

$$P_1 - P_2 = \rho_{\text{مایع}} g a \Rightarrow \frac{\Delta P}{\rho_{\text{مایع}} g} = a \quad (1)$$



از طرفی داریم:

$$\Delta P \cdot a^2 = mg \xrightarrow{(1)} \Delta P \times \left(\frac{\Delta P}{\rho_{\text{مایع}} g} \right)^2 = mg$$

$$\Rightarrow m = \frac{(\Delta P)^2}{\rho_{\text{مایع}}^2 g^2} = \frac{((109 - 107) \times 10^3)^2}{10^6 \times 10^3} = \frac{4 \times 10^9}{10^9} = 4 \text{ kg}$$

④

گزینه درست: ۱

سوال ۴

گزینه «۱»

با توجه به رابطه مقایسه‌ای چگالی داریم:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{m_1}{m_2} \times \frac{V_2}{V_1}$$

چون حجم ظرف ثابت است، پس $V_1 = V_2$ است. از طرفی جرم مایع در هر حالت برابر عدد ترازو منهای جرم ظرف است، پس داریم:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{650 - 150}{900 - 150} = \frac{500}{750} = \frac{2}{3}$$

⑤

گزینه درست: ۴

سوال ۵

گزینه «۴»

فلزها و نمک‌ها جزو جامدهای بلورین هستند ولی شیشه جزو جامدهای آمورف است. (رد گزینه «۱»)
ذرات جسم جامد ساکن نیستند و سر جای خود حرکت ارتعاشی یا نوسانی دارند. (رد گزینه «۲»)
ذرات جسم جامد به سبب نیروی الکتریکی که به هم وارد می‌کنند، کنار یکدیگر می‌مانند. (رد گزینه «۳»)

⑥

گزینه درست: ۲

سوال ۶

گزینه «۲»

دقت ترازوی عددی، مرتبه اولین رقم سمت راست است، پس برابر 0.01 g می‌باشد.
برای پیدا کردن جرم جسم، اعداد با فاصله زیاد را حذف و میانگین بقیه را حساب می‌کنیم؛ پس اعداد $20/36$ و $12/44$ حذف می‌شود.

$$\frac{18/48 + 18/66 + 18/76 + 18/60 + 18/50}{5}$$

$$= 18/60 \text{ g} = 186/0 \text{ dg}$$

۷

گزینه درست: ۴

سوال ۷

گزینه «۴»

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow N = [G] \frac{kg \cdot kg}{m^2} \Rightarrow \frac{kg \cdot m}{s^2} = [G] \frac{kg^2}{m^2}$$

$$\Rightarrow [G] = \frac{\frac{kg \cdot m}{s^2}}{\frac{kg^2}{m^2}} = \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

۸

گزینه درست: ۴

سوال ۸

گزینه «۴»

با استفاده از تعریف چگالی مخلوط داریم:

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{\rho_1 V_1 + m_2}{V_1 + \frac{m_2}{\rho_2}}$$

$$= \frac{1/2 \times 10^3 \times 10^{-6} + 10^{-6} + 27}{10^{-6} \times 10^{-6} + \frac{27}{1800}} = \frac{39}{25 \times 10^{-3}} = 1/56 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$$

توجه کنید در رابطه فوق، m ها با یکای kg ، V ها با یکای m و ρ ها با یکای $\frac{kg}{m^3}$ جای گذاری شده اند و هر جا که لازم بوده، تبدیل واحد انجام شده است.

۹

گزینه درست: ۱

سوال ۹

گزینه «۱»

با توجه به رابطه چگالی، خواهیم داشت:

$$\rho = \frac{m}{V} \xrightarrow[m_B > m_A]{m_B < m_A} \rho_A > \rho_B$$

دقت کنید که نمودارهای $m - V$ و $V - m$ نباید دارای عرض از مبدأ باشند (رد گزینه های ۲ و ۴) همچنین در نمودار $V - m$ هر چه شیب نمودار کمتر باشد، چگالی بیشتر است و در نتیجه، گزینه «۱» پاسخ صحیح است.

۱۰

گزینه درست: ۳

سوال ۱۰

گزینه «۳»

ابتدا حجم منبع آب را به دست می آوریم:

$$V = 2 \times 2/4 \times 2/5 = 12m^3 = 12 \times 10^3 L$$

حال آهنگ خروج آب را از $\frac{cm^3}{s}$ به $\frac{L}{min}$ تبدیل می کنیم:

$$125 \frac{cm^3}{s} = 125 \frac{cm^3}{s} \times \frac{60s}{1min} \times \frac{1L}{10^3 cm^3}$$

$$\Rightarrow 125 \frac{cm^3}{s} = 7/5 \frac{L}{min}$$

آهنگ پُر شدن منبع برابر است با: $7/5 + 12/5 = 20 \frac{L}{min}$

زمان پُر شدن منبع بر حسب دقیقه برابر است با:

$$12 \times 10^3 \div 20 = 6 \times 10^2 min$$

زمان پُر شدن منبع بر حسب ساعت برابر است با:

$$6 \times 10^2 \div 60 = 10h$$

۱۱

گزینه درست: ۱

سوال ۱۱

گزینه «۱»

چون چند کمیت زمانی می‌توانند با هم جمع شوند که یکای آن‌ها با هم برابر باشد. می‌توان گفت یکای d باید با (aA^2) و AB برابر باشد در نتیجه می‌توان نوشت:

$$m = \frac{m}{s^2} \times [A]^2 \Rightarrow [A]^2 = s^2 \Rightarrow [A] = s$$

چون یکای A ، ثانیه است بنابراین A از جنس زمان است.

$$m = s[B] \xrightarrow{[A]=s} [B] = \frac{m}{s}$$

چون یکای B ، متر بر ثانیه است، لذا B از جنس سرعت می‌باشد و بنابراین گزینه «۱» جواب است.

۱۲

گزینه درست: ۱

سوال ۱۲

گزینه «۱»

می‌دانیم که دقت اندازه‌گیری در ابزارهای رقمی (دیجیتال)، برابر با یک واحد از آخرین رقمی است که آن ابزار می‌خواند. در واقع می‌توان به جای آخرین رقم سمت راست، عدد یک و به جای بقیه رقم‌ها، عدد صفر گذاشت و بدون تغییر جای ممیز، دقت اندازه‌گیری را به دست آورد. بنابراین در این سؤال داریم:

$$5/005mg \xrightarrow{\text{دقت اندازه گیری}} 0/001mg$$

بدین ترتیب، دقت اندازه‌گیری ترازوی دیجیتال برابر است با:

$$0/001mg = 0/001 \times 10^{-3}g = 10^{-6}g = 1\mu g$$

۱۳

گزینه درست: ۳

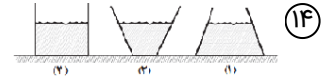
سوال ۱۳

گزینه «۳»

اگر ارتفاع استوانه را h فرض کنیم، ارتفاع هرم $\frac{h}{3}$ بوده و با توجه به ابعاد داده شده و رابطه چگالی، می‌توان نسبت چگالی دو جسم را به دست آورد:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\rho_{\text{هرم}}}{\rho_{\text{استوانه}}} = \frac{\frac{m_{\text{هرم}}}{V_{\text{هرم}}}}{\frac{m_{\text{استوانه}}}{V_{\text{استوانه}}}} = \frac{\frac{\frac{1}{3} \times 30^2 \times \frac{h}{3}}{m_{\text{استوانه}}}}{\frac{3 \times 10^2 \times h}{m_{\text{استوانه}}}}$$

$$\xrightarrow{m_{\text{هرم}} = m_{\text{استوانه}}} \frac{\rho_{\text{هرم}}}{\rho_{\text{استوانه}}} = \frac{3 \times 10^2}{\frac{1}{6} \times 900} = \frac{300}{150} = 2$$



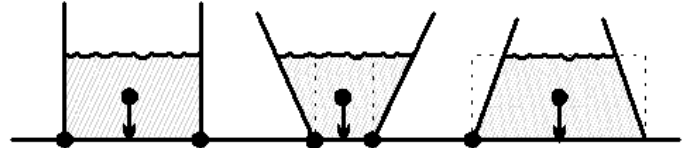
۱۴

گزینه درست: ۴

سوال ۱۴

گزینه «۴»

اندازه نیرویی که ظرف‌ها به سطح افقی وارد می‌کنند برابر با مجموع نیروی وزن ظرف و آب است و چون جرم ظرف‌ها و آب درون آن‌ها با هم برابر است، در نتیجه نیروی وزن هر سه ظرف با هم برابر بوده و در نهایت: $F_1 = F_2 = F_3$.
به کمک مقایسه زیر می‌توان نتیجه گرفت که: (وزن مایع W و نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع F')



$$F'3 = W, F'2 > W, F'1 < W$$

$$F'1 > F'3 > F'2$$

و در نهایت چون ارتفاع مایع در هر سه ظرف یکسان است، طبق رابطه زیر، فشار مایع در کف هر سه ظرف برابر است:

$$P = \rho gh \Rightarrow P \propto h \xrightarrow{h_1 = h_2 = h_3} P_1 = P_2 = P_3$$

۱۵

گزینه درست: ۲

سوال ۱۵

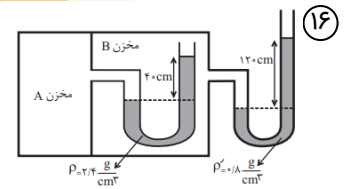
گزینه «۲»

طبق قاعده تبدیل زنجیره‌ای داریم:

$$1 \text{ سال} = 1 \text{ سال} \times \frac{365 \text{ روز}}{1 \text{ سال}} \times \frac{24 \text{ h}}{\text{روز}} \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 3.1536 \times 10^7 \text{ s}$$

$$1 \text{ سال نوری} = 3.1536 \times 10^7 \text{ s} \times \frac{3 \times 10^8 \text{ m}}{1 \text{ s}} \simeq 9.46 \times 10^{15} \text{ m}$$

$$1 \text{ فاصله مورد نظر} = 2 \times 10^{26} \text{ m} \times \frac{1 \text{ ly}}{9.46 \times 10^{15} \text{ m}} \simeq 2.1 \times 10^{10} \text{ ly}$$

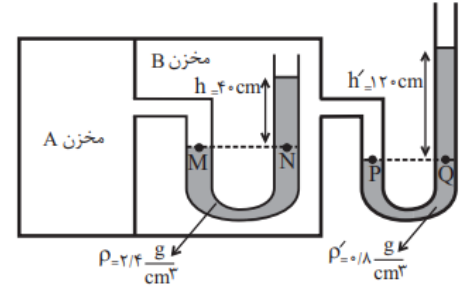


گزینه درست: ۱

سوال ۱۶

گزینه «۲»

با توجه به برابری فشار در نقاط هم‌تراز یک مایع ساکن، در داخل هر یک از لوله‌های U شکل داریم:



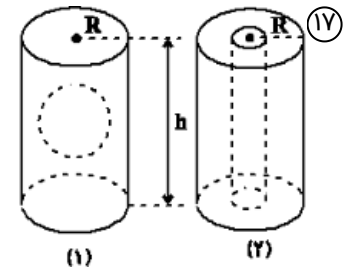
$$P_P = P_Q \Rightarrow P_B = \rho'gh' + P_0 \quad (۱)$$

$$P_M = P_N \Rightarrow P_A = \rho gh + P_B$$

$$\xrightarrow{(۱)} P_A = \rho gh + \rho'gh' + P_0$$

$$\Rightarrow P_A = \frac{2}{4} \times 10^3 \times 10 \times \frac{0.4}{100} + \frac{0.125}{100} \times 10^3 \times 10 \times \frac{12}{100} + 97 \times 10^3$$

$$\Rightarrow P_A = 117 \times 10^3 \text{ Pa} = 117 \text{ kPa}$$



گزینه درست: ۱

سوال ۱۷

گزینه «۱»

در شکل (۲) در هر ارتفاعی سطح مقطع ثابت است. چون جرم و سطح مقطع به یک میزان از استوانه (۲) کم شده است. پس فشار همان ρgh خواهد بود.

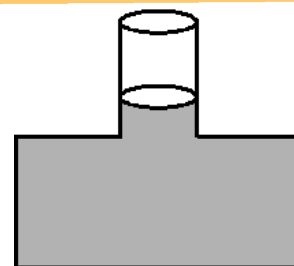
$$P_{(۲)} = \frac{F}{A} = \frac{W}{A} = \frac{\downarrow mg}{\downarrow A} = \rho gh$$

اما در شکل (۱) سطح مقطع تغییر نکرده، بلکه فقط جرم کم شده؛ پس فشار از حالت قبلی (استوانه توپر) کمتر می‌شود.

$$P_{(۱)} = \frac{F}{A} = \frac{W}{A} = \frac{\downarrow mg}{A} \Rightarrow P_{(۱)} < \rho gh$$

در نتیجه: $P_{(۱)} < P_{(۲)}$

۱۸



گزینه درست: ۳

سوال ۱۸

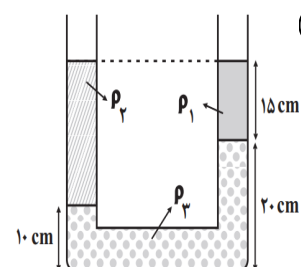
گزینه «۳»

اگر سطح مقطع دهانه ظرف را a و سطح مقطع کف ظرف را A و وزن مایع اضافه شده را F' فرض کنیم، رابطه زیر برقرار است:

$$F' = mg = \frac{\pi}{4} \times 10 = 2N$$

$$\Delta F = \frac{A}{a} F' \Rightarrow \Delta F = \frac{A}{\frac{1}{5}A} \times 2 = 10N$$

۱۹

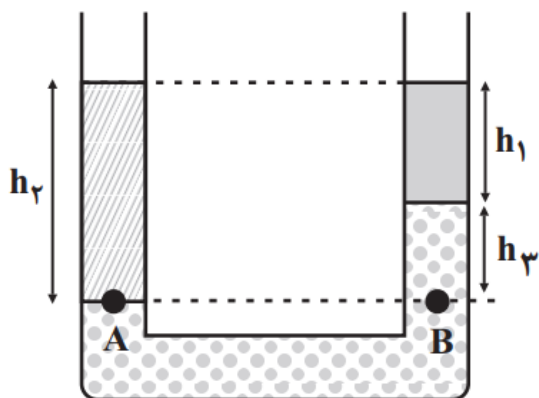


گزینه درست: ۲

سوال ۱۹

گزینه «۲»

ابتدا با توجه به اصل برابری فشار در نقاط هم‌تراز یک مایع ساکن، چگالی مایع (۲) را به دست می‌آوریم:



$$P_A = P_B$$

$$P_2 + P_0 = P_1 + P_2 + P_0$$

$$\Rightarrow \rho_2 g h_2 = \rho_1 g h_1 + \rho_3 g h_3$$

$$\Rightarrow \rho_2 h_2 = \rho_1 h_1 + \rho_3 h_3$$

$$(h_1 = 15cm, h_2 = 25cm, h_3 = 10cm)$$

$$\Rightarrow \rho_2 = \frac{F_0}{V_2} = \frac{1}{6} \frac{g}{cm^3}$$

$$V_2 = \pi r^2 h_2 \Rightarrow 3 \times \frac{\pi}{4} \times 25 = 18/75 cm^3$$

$$\Rightarrow m_2 = \rho_2 V_2 = \frac{1}{6} \times 18/75 = 30g$$

گزینه «۴»

ابتدا حجم آن‌ها را برحسب ℓ به دست می‌آوریم.

$$\ell^3 = \text{حجم مکعب}$$

$$\text{حجم استوانه} = \left(\pi \ell^2 - \pi \left(\frac{\ell}{3} \right)^2 \right) \times \frac{3}{4} \ell = \frac{4}{3} \pi L^3 = 4L^3$$

حال با استفاده از رابطه چگالی داریم:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\rho_{\text{استوانه}}}{\rho_{\text{مکعب}}} = \frac{m_{\text{استوانه}}}{m_{\text{مکعب}}} \times \frac{V_{\text{مکعب}}}{V_{\text{استوانه}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_{\text{استوانه}}}{\rho_{\text{مکعب}}} = 4 \times \frac{\ell^3}{4\ell^3} = 1$$

۱

سوال ۱ گزینه درست: ۱

بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) مرگ ستاره با یک انفجار بزرگ همراه است که سبب می‌شود عنصرهای تشکیل شده در آن در فضا پراکنده شوند.
ت) ستارگان پس از چندین میلیون سال نورافشانی و گرمابخشی، پایداری خود را از دست داده و در انفجاری مهیب متلاشی می‌شوند.

۲

سوال ۲ گزینه درست: ۳

بررسی گزینه های نادرست:

گزینه «۱»: آخرین تصویری که وویجر ۱ پیش از خروج از سامانه ی خورشیدی از کره ی زمین گرفت در فاصله ی ۷ میلیارد کیلومتری بود. بعد از آن وویجر ۱ باز هم از زادگاه خود عکس می گرفت ولی دیگر در سامانه ی خورشیدی قرار نداشت و از خارج این منظومه عکسبرداری های خود را از زمین انجام می داد.
گزینه «۲»: عناصر S و O جزء هشت عنصر فراوان در سیاره های زمین و مشتری هستند.
گزینه «۴»: هر چه دمای ستاره بالاتر باشد، شرایط تشکیل عناصر سنگین تر بیشتر فراهم می شود.

۳

سوال ۳ گزینه درست: ۲

آهن فراوان‌ترین عنصر در کل سیاره زمین است نه در پوسته زمین.

۴

سوال ۴ گزینه درست: ۳

$$\begin{aligned} {}^{112}_{48}\text{Cd}^{2+} : \text{تعداد نوترون ها} &= 112 - 48 = 64 \\ {}^{56}_{26}\text{Fe}^{2+} : \text{تعداد الکترون ها} &= 26 - 2 = 24 \\ {}^{56}_{26}\text{Fe}^{2+} : \text{تعداد نوترون ها} &= 56 - 26 = 30 \\ {}^{56}_{26}\text{Fe}^{2+} : \text{تعداد نوترون ها و الکترون ها} &= 30 - 24 = 6 \\ \Rightarrow \frac{\text{تعداد نوترون های } {}^{112}_{48}\text{Cd}^{2+}}{\text{اختلاف تعداد نوترون ها و الکترون های } {}^{56}_{26}\text{Fe}^{2+}} &= \frac{64}{6} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

۵

سوال ۵ گزینه درست: ۱

یک نمونه طبیعی هیدروژن شامل ۳ ایزوتوپ (${}^1_1\text{H}$, ${}^2_1\text{H}$, ${}^3_1\text{H}$) است. در بین ایزوتوپ‌های طبیعی دو ایزوتوپ ${}^1_1\text{H}$ و ${}^2_1\text{H}$ پایدار اما ایزوتوپ ${}^3_1\text{H}$ ناپایدار و پرتوزا است.

۶

سوال ۶ گزینه درست: ۲

بررسی‌ها نشان می‌دهد که اغلب در یک نمونه طبیعی از عنصری معین، اتم‌های سازنده، جرم یکسانی ندارند.

۷

سوال ۷ گزینه درست: ۳

گزینه «۳»

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: نسبت تعداد نوترون‌ها به پروتون‌ها در اتم ${}^{99}_{43}\text{Tc}$ تقریباً برابر با ۳/۱ است.
گزینه «۲»: به دلیل این که یون حاوی ${}^{99}_{43}\text{Tc}$ با یون یدید اندازه مشابهی دارد و غده تیروئید هنگام جذب یون یدید، این یون را نیز جذب می‌کند، از آن در تصویربرداری غده تیروئید استفاده می‌شود.
گزینه «۴»: همه تکنسیم موجود در جهان به طور مصنوعی ساخته شده است و هیچ مقدار از آن در طبیعت یافت نمی‌شود.

۸

گزینه درست: ۲

سوال ۸

گزینه «۲»

عبارت‌های «آ» و «پ» درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت (آ): ایزوتوپ‌ها در تعداد پروتون‌ها (عدد اتمی)، تعداد الکترون‌ها، آرایش الکترونی و خواص شیمیایی مشابه و در تعداد نوترون‌ها، عدد جرمی و خواص فیزیکی وابسته به جرم (مثل چگالی و نقطه جوش) متفاوت هستند.

عبارت (ب): اگر اختلاف شمار نوترون‌ها و الکترون‌ها در یون A^x برابر ۱۷ باشد، x برابر (۳-) است:

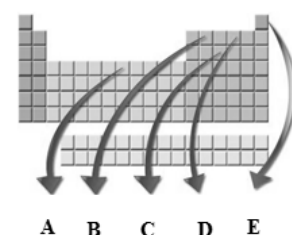
$$\left. \begin{array}{l} n \text{ (شمار نوترون ها)} = 122 - 51 = 71 \\ e^- \text{ (شمار الکترون ها)} = 51 + a \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow n - e = 71 - (51 + a) = 17 \\ \rightarrow a = +3 \Rightarrow x = -3 \end{array}$$

عبارت (پ): ایزوتوپ‌های طبیعی هیدروژن عبارت‌اند از: 1H , 2H , 3H

که در میان آن‌ها ایزوتوپ‌های 1H و 2H پایدار هستند؛ بنابراین مجموع عدد جرمی ایزوتوپ‌های طبیعی و پایدار هیدروژن برابر $3(1+2)$ و مجموع عدد اتمی ایزوتوپ‌های طبیعی هیدروژن نیز برابر $3(1+1+1)$ است.

عبارت (ت): تکنسیم (^{99}Tc) نخستین عنصر ساخته شده در واکنشگاه هسته‌ای است که در تصویربرداری پزشکی کاربرد ویژه‌ای دارد؛ در حالی که شناخته شده‌ترین فلز پرتوزا، اورانیم است.

۹



گزینه درست: ۲

سوال ۹

عناصر مشخص شده، $A = {}_{26}Fe$ ، $B = {}_6C$ ، $C = {}_{15}P$ ، $D = {}_8O$ و $E = {}_2He$ می‌باشند. بدین ترتیب، از آنجایی که عناصر S و 16 در یک گروه از جدول دوره‌ای عناصر قرار دارند، پس خواص شیمیایی مشابهی دارند و هر دو آنیون با بار الکتریکی -2 تشکیل می‌دهند.

۱۰

گزینه درست: ۳

سوال ۱۰

ید قبل از گاز رزن و در تناوب ۵ است. کبالت نیز در تناوب ۴ و گروه ۹ است. پس عنصر مورد نظر در گروه ۹ و تناوب ۵ است. پس عدد اتمی این عنصر همانند کبالت، ۹ واحد کم‌تر از گاز نجیب هم دوره‌اش است. یعنی $54 - 9 = 45$

۱۱

گزینه درست: ۳

سوال ۱۱

گزینه «۳»

جرم پروتون و نوترون در حدود 1 amu بوده در حالی که جرم الکترون ناچیز و در حدود $\frac{1}{1836} \text{ amu}$ است.

۱۲

گزینه درست: ۱

سوال ۱۲

جرم یک الکترون ناچیز و در حدود $\frac{1}{1836} \text{ amu}$ است.

۱۳

گزینه درست: ۴

سوال ۱۳

$$\frac{\frac{1}{17} \text{ g NH}_3 \times \frac{1 \text{ mol NH}_3}{17 \text{ g NH}_3} \times \frac{6/02 \times 10^{23} \text{ مولکول NH}_3}{1 \text{ mol NH}_3}}{\frac{2/23 \text{ g Na} \times \frac{1 \text{ mol Na}}{23 \text{ g Na}} \times \frac{6/02 \times 10^{23} \text{ اتم Na}}{1 \text{ mol Na}}} = 1$$

(۱۴)

سوال ۱۴

گزینه درست: ۳

گزینه «۳»

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه «۱»: فراوانی ایزوتوپ ^{235}U در مخلوط طبیعی آن کمتر از ۰/۷ درصد است، پس این ایزوتوپ فراوانی خیلی کمی داشته و پایداری زیادی ندارد.

گزینه «۲»: جدول دوره‌ای عناصر دارای ۱۱۸ عنصر در ۷ دوره و ۱۸ گروه است.

گزینه «۴»: اگر به تعداد عدد آووگادرو اتم ^{56}Fe داشته باشیم، یک مول از این اتم خواهیم داشت. جرم یک مول اتم ^{56}Fe برابر ۵۶ گرم است.

(۱۵)

سوال ۱۵

گزینه درست: ۳

گزینه «۳»

شمار نوترون‌ها	شمار الکترون‌ها	شمار پروتون‌ها	عدد جرمی	شمار عدد اتمی	گونه
۲۰	۱۸	۲۰	۴۰	۲۰	$^{40}_{20}\text{Ar}^{2+}$
۱۶	۱۸	۱۶	۳۲	۱۶	$^{32}_{16}\text{S}^{2-}$
۲۰	۱۸	۱۹	۳۹	۱۹	$^{39}_{19}\text{K}^{+}$

(۱۶)

سوال ۱۶

گزینه درست: ۱

دانشمندان با استفاده از دستگاهی به نام طیف‌سنج جرمی جرم اتم‌ها را با دقت زیاد اندازه‌گیری می‌کنند. با توجه به آن که به دنبال جرم تقریبی یک اتم سدیم مجهول است و می‌توانیم به تقریب جرم یک پروتون و یک نوترون را برابر و مساوی با $1/66 \times 10^{-24}$ گرم (1amu) در نظر بگیریم، پس:

$$23 \times 1/66 \times 10^{-24} = 38/18 \times 10^{-24} \text{ g}$$

(۱۷)

سوال ۱۷

گزینه درست: ۱

گزینه «۱»

ابتدا جرم مولی مولکول NO_n را به دست می‌آوریم:

$$\text{NO}_n \text{ جرم مولی} = (14 + 16n) \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

اکنون با توجه به اطلاعات موجود در سؤال، n را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 1/5 \text{ mg NO}_n \times \frac{1 \text{ g NO}_n}{1000 \text{ mg NO}_n} \times \frac{1 \text{ mol NO}_n}{(14 + 16n) \text{ g NO}_n} \\ \times \frac{6/02 \times 10^{23} \text{ NO}_n}{1 \text{ mol NO}_n} = 3/01 \times 10^{19} \text{ NO}_n \\ 30 = 14 + 16n \Rightarrow n = 1 \end{aligned}$$

(۱۸)

سوال ۱۸

گزینه درست: ۴

$$\left. \begin{aligned} N &= e - 2 \\ N + Z &= 96 \\ Z &= e + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} N + Z = 96 \\ N = Z - 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z + Z - 4 = 96 \Rightarrow 2Z = 100 \Rightarrow Z = 50$$

(۱۹)

سوال ۱۹

گزینه درست: ۱

گزینه «۱»

$$\begin{aligned} ? \text{ g CH}_3\text{OH} &= 48/16 \times 10^{23} \text{ atom H} \times \frac{1 \text{ mol H}}{6/02 \times 10^{23} \text{ atom H}} \times \\ &\times \frac{1 \text{ mol CH}_3\text{OH}}{4 \text{ mol H}} \times \frac{32 \text{ g CH}_3\text{OH}}{1 \text{ mol CH}_3\text{OH}} = 6/4 \text{ g CH}_3\text{OH} \end{aligned}$$

گزینه «۲»

شمار اتم‌های هیدروژن موجود در ساختار متان:

$$\text{شمار } atomH = 16gCH_4 \times \frac{1molCH_4}{16gCH_4} \times \frac{N_A moleculeCH_4}{1molCH_4} \\ \times \frac{4atomH}{1moleculeCH_4} = 4N_A atomH$$

شمار اتم‌های هیدروژن موجود در ساختار آمونیاک:

$$atomH = 2molNH_3 \times \frac{N_A moleculeNH_3}{1molNH_3} \times \frac{3atomH}{1moleculeNH_3} = 6N_A atomH \\ atomH = 4N_A + 6N_A = 10N_A \\ = 10 \times 6.02 \times 10^{23} = 6.02 \times 10^{24}$$